〈「回転演算子による、ベクトルの回転演算」の概要〉

◎　n次元ユークリッド空間内の平面A上のベクトルを角αだけ回転させる

「回転演算子（複素数）」を、$R_A(\alpha)=\cos\alpha+\sin\alpha\ \boldsymbol{i}_A$　とする。

「$\boldsymbol{i}_A=R_A(90°)$」は複素平面$A$の虚数単位で、これを「直交演算子」とよぶことにする。

◎　平行でない2つのベクトルa，b によりa，b のなす平面が定まり、その

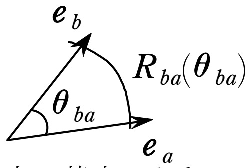
上の「aから　b への回転演算子」　　$R_{ba}(\theta_{ba})=\cos\theta_{ba}+\sin\theta_{ba}\ \boldsymbol{i}_{ba}$　が定まる。

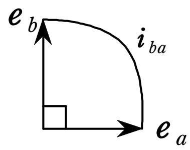
◎　「a，b から$R_{ba}(\theta_{ba})$を求める演算」として「a，b の複素内積 b＊a」を次のように定義する。

$$\mathrm{b}*\mathrm{a}=ba(\cos\theta_{ba}+\sin\theta_{ba}\ \boldsymbol{i}_{ba})$$

単位ベクトル「$\boldsymbol{e}_a$＝a/a，$\boldsymbol{e}_b$＝b/b」に対しては、次のように回転演算子となり、

$$\boldsymbol{e}_b*\boldsymbol{e}_a=\cos\theta_{ba}+\sin\theta_{ba}\ \boldsymbol{i}_{ba}=R_{ba}(\theta_{ba})$$





「$\boldsymbol{e}_b\perp\boldsymbol{e}_a$」ならば直交演算子となる。

$$\boldsymbol{e}_b*\boldsymbol{e}_a=\boldsymbol{i}_{ba}$$

◎　直交座標軸「h_1軸，h_2軸，h_3軸，…h_n軸」とその上の基底ベクトル

「$\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3,\cdots\boldsymbol{e}_n$」を定めると各「座標平面の直交演算子$\boldsymbol{i}_{lk}$」は次式で求められる。

$$\boldsymbol{e}_2*\boldsymbol{e}_1=\boldsymbol{i}_{21},$$
$$\boldsymbol{e}_3*\boldsymbol{e}_1=\boldsymbol{i}_{31},\ \boldsymbol{e}_3*\boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{i}_{32},$$
$$\boldsymbol{e}_4*\boldsymbol{e}_1=\boldsymbol{i}_{41},\ \boldsymbol{e}_4*\boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{i}_{42},\ \boldsymbol{e}_4*\boldsymbol{e}_1=\boldsymbol{i}_{43},$$
$$\cdots$$

◎　任意のベクトル「$\boldsymbol{p}=p_1\boldsymbol{e}_1+p_2\boldsymbol{e}_2+p_3\boldsymbol{e}_3+\cdots+p_n\boldsymbol{e}_n$」は基底ベクトル

$\boldsymbol{e}_1$からpへの回転演算子「$Z_p=\boldsymbol{p}*\boldsymbol{e}_1$」で

$$\boldsymbol{p}=Z_p\boldsymbol{e}_1=(\boldsymbol{p}*\boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{e}_1$$

と表される。Z_pは次のように$\boldsymbol{p}$の各成分を表すから

$$Z_p=\boldsymbol{p}*\boldsymbol{e}_1=(p_1\boldsymbol{e}_1+p_2\boldsymbol{e}_2+p_3\boldsymbol{e}_3+\cdots+p_n\boldsymbol{e}_n)*\boldsymbol{e}_1$$
$$=p_1+p_2\,\boldsymbol{i}_{21}+p_3\,\boldsymbol{i}_{31}+\cdots+p_n\,\boldsymbol{i}_{n1}$$

を「ベクトル$\boldsymbol{p}$の、ベクトル$\boldsymbol{e}_1$に対する複素成分」とよぶ。

◎　一般の「aからbへの回転演算子$R_{ba}(\theta_{ba})$」も次式のように「座標平面の直交演算子$\boldsymbol{i}_{lk}$」の一次結合で表される。

$$R_{ba}(\theta_{ba})=(\mathrm{b}/\mathrm{b})*(\mathrm{a}/\mathrm{a})=\boldsymbol{e}_b*\boldsymbol{e}_a$$
$$=(e_{b1}\boldsymbol{e}_1+e_{b2}\boldsymbol{e}_2+e_{b3}\boldsymbol{e}_3+\cdots+e_{bn}\boldsymbol{e}_n)$$
$$*(e_{a1}\boldsymbol{e}_1+e_{e2}\boldsymbol{e}_2+e_{e3}\boldsymbol{e}_3+\cdots+e_{an}\boldsymbol{e}_n)$$
$$=(e_{b1}e_{a1}+e_{b2}e_{a2}+e_{b3}e_{a3}+\cdots+e_{bn}e_{an})$$
$$+(e_{b2}e_{a1}-e_{b1}e_{a2})\boldsymbol{i}_{21}$$
$$+(e_{b3}e_{a1}-e_{b1}e_{a3})\boldsymbol{i}_{31}+(e_{b3}-e_{b2}e_{a3})\boldsymbol{i}_{32}$$
$$\cdots$$
$$+(e_{bn}e_{an-1}-e_{bn-1}e_{an})\boldsymbol{i}_{n\,n-1}$$

◎　以上のように、「ベクトル」，「回転演算子」，「それらの演算」は「各座標平面の直交演算子

$\boldsymbol{i}_{21},\boldsymbol{i}_{31},\boldsymbol{i}_{32},\boldsymbol{i}_{41}\cdots$」であらわされる。